Friedrich Stummel · Ludwig Kohaupt

Eigenwertaufgaben in Hilbertschen Räumen

Mit Aufgaben und vollständigen Lösungen

Logos Verlag Berlin

λογος

Computational and Applied Mathematics

Volume 1

Edited by

Juniorprofessor Dr. Jan Heiland
Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems Magdeburg,
Sandtorstraße 1, 39106 Magdeburg, Germany

Email: heiland@mpi-magdeburg.mpg.de

Professor Dr. Ludwig Kohaupt
Beuth University of Technology Berlin, Department of Mathematics,
Luxemburger Str. 10, 13353 Berlin, Germany

Email: kohaupt@beuth-hochschule.de

Professor Dr. Yan Wu
Georgia Southern University, Department of Mathematical Sciences,
Georgia Ave 65, Statesboro, GA, 30460, USA

Email: yan@georgiasouthern.edu

Prof. Dr.rer.nat. Friedrich Stummel †

Geboren 1929 in Berlin. Studium der Mathematik
und Physik von 1950 bis 1955 an den Universitäten
Göttingen, Tübingen und Paris. Diplom 1954
und Promotion 1955 in Göttingen. Von 1956 bis 1961
Leiter der Rechengruppe im Institut für Neutronenphysik
und Reaktortechnik des Kernforschungszentrums Karlsruhe.
Habilitation 1961 an der Technischen Universität Berlin.
Von 1961 bis 1964 Privatdozent an der
Technischen Universität und wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Hahn-Meitner-Institut für Kernforschung in Berlin.
1964 Berufung als o. Professor auf den Lehrstuhl
für Angewandte und Instrumentelle Mathematik
der Universität Frankfurt/M. Seit 1995 emeritiert. [1]

Prof. Dr.rer.nat.habil. Ludwig Kohaupt

Geboren 1945 in Ossendorf/Warburg(Westfalen). Studium der
Mathematik und Physik von 1968 bis 1973 an der Universität
Frankfurt/M. 1971 Diplom und 1973 Promotion zum Dr.phil.nat.
Von 1974 bis 1979 Lehrer an Gymnasien in Hessen für die
Fächer Mathematik und Physik. 1975 Zweites Staatsexamen
für das Lehramt an Gymnasien. 1979 Beamter auf Lebenszeit.
Während der Lehrerzeit Gasthörer an der damaligen Technischen
Hochschule Darmstadt in technischen Grundlagenfächern wie z.B.
Technische Mechanik, Technische Schwingungslehre und
Regelungstechnik. Von 1979 - 1990 Berechnungsingenieur in der
Automobilindustrie, Stuttgart, auf Gebieten wie Nocken-,
Motor- und Zahnradberechnung, Schwingungsberechnung sowie
Aktive Radaufhängung mit selbstentwickelten Berechnungsverfahren
sowie selbstentwickelten FORTRAN-Programmen und kommerziellem
Finite-Elemente-Programm-MSC/NASTRAN. 1990 Berufung
auf eine C2-Professur für Mathematik an die damalige
Technische Fachhochschule Berlin, seit 2009 umbenannt
zu Beuth Hochschule für Technik Berlin. Unterrichtsfächer
schwerpunktmäßig Ingenieurmathematik, Numerische Mathematik,
Technische Mechanik und Technische Schwingungslehre.
2004 Zweitberufung auf eine C3-Professur. 2009 Habilitation
an der TU Bergakademie Freiberg und Erwerb des Akademischen
Grades eines habilitierten Doktors der Naturwissenschaften
Dr.rer.nat.habil. Nach dreijähriger Verlängerung der Dienstzeit
seit April 2014 im Ruhestand.

[1] Bis auf die Angabe "Seit 1995 emeritiert." ist alles dem Buch entnommen
F. Stummel/K. Hainer, Praktische Mathematik. B.G. Teubner, Stuttgart, 1982.

Vorwort

Dieses Skript mit dem Titel *Eigenwertaufgaben in Hilbertschen Räumen mit Aufgaben und vollständigen Lösungen* ist in zwei Teile gegliedert.

In Teil 1 werden Eigenwertaufgaben für Paare A, B von symmetrischen linearen Operatoren mit kompaktem Operator B bzw. für Paare a, b von symmetrischen Sesquilinearformen mit kompakter Sesquilinearform b in einem Hilbertschen Raum H behandelt. Durch die funktionalanalytische Darstellung werden die Ergebnisse besonders klar und auf viele verschiedene Gebiete anwendbar, so z.B. auf Randeigenwertaufgaben gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, Eigenwertaufgaben bei Integralgleichungen und bei Matrizen, um nur die wichtigsten Anwendungsgebiete zu nennen. Die Ergebnisse bei Eigenwertaufgaben für Paare von symmetrischen Operatoren bzw. bei Paaren von symmetrischen Sesquilinearformen im Sonderfall von endlichdimensionalen Hilberträumen, d.h. in endlichdimensionalen Vektorräumen mit Skalarprodukt, also *im Sonderfall von Matrizen*, können ihrerseits dazu dienen, *Näherungsverfahren* zur Lösung von entsprechenden Eigenwertaufgaben in unendlichdimensionalen Räumen herzuleiten; diese wiederum können dann angewandt werden z.B. auf die näherungsweise Lösung von Randeigenwertaufgaben gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen und von Eigenwertaufgaben bei Integralgleichungen. Durch diese Doppelrolle haben Eigenwertaufgaben für symmetrische Matrizenpaare bzw. von symmetrischen Sesquilinearformen eine besondere Bedeutung.

Bei der Behandlung von Eigenwertaufgaben beschränkt sich die Darstellung zwar auf Paare von symmetrischen Operatoren bzw. auf Paare von symmetrischen Sesquilinearformen in Hilbertschen Räumen, aber an vielen Stellen können die Voraussetzungen abgeschwächt werden. So wird z.B. die Entwicklung eines kompakten symmetrischen Operators nach seinen Eigenvektoren in einem prähilbertschen Raum bewiesen, d.h. ohne dass die Vollständigkeit des Raumes H vorausgesetzt wird. Weiter werden einige grundlegende Eigenschaften von kompakten Operatoren T bewiesen, die einen normierten Raum in einen anderen normierten Raum abbilden, oder es werden die Resolventenmenge eines beschränkten linearen Operators in einem komplexen Banachraum E betrachtet, und ebenso wird in einem solchen Raum die Resolvente in der Umgebung von isolierten Teilen des Spektrums untersucht.

Teil 1 ist seinerseits in die zwei Kapitel I und II untergliedert.

Kapitel I besteht aus den Abschnitten 1 - 21 und enthält die Standardmethoden zur Behandlung von Eigenwertaufgaben; damit sind hier diejenigen Methoden gemeint, die ohne funktionentheoretische Hilfsmittel auskommen.

Demgegenüber verwendet Kapitel II gerade funktionentheoretische Methoden und enthält die Abschnitte 22 - 28.

Für Einzelheiten zu den Abschnitten sei auf das Inhaltsverzeichnis verwiesen.

In Teil 2 werden Übungsaufgaben zu den Eigenwertaufgaben gestellt und Lösungen dazu angegeben.

Zur Entstehung dieses Buches ist folgendes zu sagen:

Im Wintersemester 1969/70 hat Herr Prof. Dr. Friedrich Stummel an der Universität Frankfurt am Main die Lehrveranstaltung *Eigenwertaufgaben und Übungen zu den Eigenwertaufgaben* gehalten, die für fortgeschrittene Studierende des Studiengangs Mathematik gedacht war. Der Zeitumfang betrug 4 + 1 Semesterwochenstunden, d.h. es handelte sich um eine 4-stündige Vorlesung und eine 1-stündige zugehörige Übung. Seinerzeit hatte der Zweitautor diese Lehrveranstaltung nicht besucht. Als Vorbereitung auf seine Dissertation hat er das handgeschriebene Manuskript aber vom Erstautor, der auch sein Betreuer war, erhalten, das jedoch die getrennt gestellten Übungsaufgaben nicht enthielt.

Nun hat es der Zweitautor unternommen, das handgeschriebene Manuskript des im Jahre 2005 verstorbenen Erstautors mit Erlaubnis seiner Witwe in Latex zu setzen und zu veröffentlichen. Denn obwohl seit der Lehrveranstaltung im Wintersemester 1969/70 mehr als 50 Jahre vergangen sind, ist das Skript nach Auffassung des Zweitautors wegen der funktionalanalytischen Darstellung und besonders wegen der Stoffauswahl noch immer interessant und lehrreich, besonders auch weil einige Ergebnisse bis heute keinen Eingang in entsprechende Lehrbücher gefunden haben, so z.B. Abschnitt 12 über das allgemeine Eigenwertproblem, Abschnitt 13 über den Wertebereich quadratischer Formen und Abschnitt 14 über Eigenwertaufgaben für K-symmetrische Operatoren, worauf wir anschließend noch etwas näher eingehen.

In Abschnitt 12 wird eine Theorie für Eigenwertaufgaben entwickelt, die durch ein Paar von symmetrischen Operatoren A, B bzw. Sesquilinearformen a, b erklärt sind. Genauer wird hierbei vorausgesetzt, dass es für die zu a, b gehörigen quadratischen Formen ein Paar reeller Zahlen α, β gibt, so daß die Linearkombination $\alpha a + \beta b$ auf allen Elementen ungleich Null eines Vektorraumes V positiv ist, womit sich dann ein Skalarprodukt und eine Norm definieren lassen. Die allgemeine Eigenwertaufgabe wird dann in der durch diese Norm definierten Metrik untersucht.

In Abschnitt 13 läßt sich mit dem Satz von HAUSDORFF zeigen, daß ein Paar a, b hermitescher Sesquilinearformen ohne gemeinsame nichttriviale Nullstellen immer eine reelle strikt positive Linearkombination gestattet, so daß die in Abschnitt 12 entwickelte Theorie anwendbar wird.

In Abschnitt 14 werden Eigenwertaufgaben betrachtet, die durch ein Paar von Operatoren T, S in einem prähilbertschen Raum definiert werden. Diese Operatoren brauchen dabei nicht symmetrisch zu sein. Vielmehr genügt es, wenn T und S auf ihrem Definitionsbereich mit Hilfe eines geeigneten Operators K symmetrisierbar sind.

Die Darstellung von Teil 1 ist an vielen Stellen knapp oder sogar sehr knapp gehalten, was sich darin äußert, daß an den betreffenden Stellen Zwischenrechnungen fehlen, so daß die Darstellung ohne Zuhilfenahme von Papier und Bleistift kaum zu verstehen ist. Anstelle der nicht vorhandenen Übungsaufgaben hat der Zweitautor daher in Teil 2 eigene Übungsaufgaben gestellt und zugehörige Lösungen angegeben, die dazu dienen sollen, die durch die fehlenden Zwischenrechnungen entstandenen Lücken zu schließen und dadurch das Skript für eine größere Leserschaft verständlich zu machen. Der Zweitautor geht davon aus, daß die eine oder andere der hier gestellten Übungsaufgaben in ähnlicher Form auch unter den ursprünglich gestellten zu finden war. Bei den Übungsaufgaben sind nicht immer alle Voraussetzungen angegeben. In solchen Fällen kann der Leser die genauen Voraussetzungen aber dem Vorlesungstext entnehmen.

Die genannte Methode, bei schwierigen Stellen Papier und Bleistift zur Hand zu nehmen, ist auch als Anregung - speziell für Studierende - gedacht, bei anderen Texten in ähnlicher Weise vorzugehen.

Die Darstellung des Stoffes in Teil 1 geschieht - wie an Universitäten üblich - deduktiv, d.h. die Sätze sind gegliedert in *Voraussetzung - Behauptung - Beweis.* Ein typisches Beispiel ist Satz 11.3 aus Abschnitt 11 über das reguläre STURM-LIOUVILLE-Problem. In dem genannten Satz wird die Greensche Funktion ohne Herleitung angegeben. Ein solches Vorgehen ist natürlich - nicht nur für Ingenieure - unbefriedigend. Denn eigentlich möchte man als Leser doch gerne wissen, wie man die Greensche Funktion erhält. Daher hat der Zweitautor die Herleitung der Greenschen Funktion als Übungsaufgabe gestellt und in der Lösung die Herleitung angeben.

Der Zweitautor hat in Teil 1 versucht, sich möglichst eng an das ursprüngliche Manuskript zu halten. Es wurden jedoch entdeckte Schreibfehler korrigiert, an einigen Stellen die Voraussetzungen in Sätzen präzisiert und einige Ergänzungen hinzugefügt, die aber - außer bei Kleinigkeiten - als solche gekennzeichnet sind, und es wurde an den schwierigen Stellen auf die Übungsaufgaben verwiesen.

In einigen Abschnitten von Teil 1 ist vom Erstautor speziell für die betreffenden Abschnitte Literatur angegeben worden. Dies wird hier beibehalten. Darüber hinaus ist aber vom Zweitautor am Ende des Skriptes noch ein Literaturverzeichnis erstellt worden, das alle Literaturangaben von Teil 1 und auch von Teil 2 enthält.

Es ist daran gedacht, zu gegebener Zeit das vorliegende Buch unter Einbeziehung neuerer Veröffentlichungen zu überarbeiten. Ferner ist geplant, weitere Übungsaufgaben, z.B. auch aus den Bereichen Differentialgleichungen und Integralgleichungen sowie Beispiele aus dem Ingenieurbereich aufzunehmen und damit für Mathematiker, Naturwissenschaftler und Ingenieure noch interessanter zu machen für das Studium, die Lehre und die Praxis.

Durch den Verweis auf die Übungsaufgaben - im Text nur Aufgaben genannt - an Stellen mit Gedankensprüngen ist es dem Leser zwar in einfacher Weise möglich, die Einzelheiten nachzulesen. Bei häufigen Verweisen unterbricht das aber den Lesefluß. Daher wird empfohlen, beim ersten Lesen die Verweise zu übergehen. Bei der angedachten Überarbeitung des Buches scheint es dem Zweitautor jedoch zweckmäßig zu sein, an vielen Stellen anstatt der Verweise auf Einzelheiten wie hier die Einzelheiten selbst in den Text einzufügen. Das wäre natürlich auch hier schon möglich gewesen. Doch war es dem Zweitautor wichtig, sich so nah wie möglich an die ursprüngliche Fassung des Skripts zu halten.

Im Vergleich zur Monographie von F. Stummel, Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1969 spricht das vorliegende Skript eine größere Leserschaft an.

Es wird noch darauf hingewiesen, daß Zeilenvektoren $u = (u_1, \cdots, u_n)$ als Spaltenvektoren zu interpretieren sind, wenn $n \times n$-Matrizen $A = (a_{jk})$ darauf angewandt werden, so daß $b := Au$ definiert ist und den Spaltenvektor b mit $b_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_k$, $j = 1, \cdots, n$ liefert.

Im Text werden noch die folgenden Abkürzungen verwandt: F.St. für Friedrich Stummel als Erstautor und Verfasser von Teil 1 sowie L.K. für Ludwig Kohaupt als Zweitautor und Verfasser von Teil 2.

In den Übungsaufgaben werden der Kürze halber die Zeichen $\exists$ für „es existiert“ und $\Rightarrow$ für „daraus folgt“ verwandt. Außerdem sind die Sätze nicht immer vollständig. Weiter werden in Aufzählungen als Trennzeichen das Leerzeichen, das Komma, das Semikolon und der Punkt uneinheitlich verwandt.

Der Gutachter hat eine Reihe wertvoller Änderungsvorschläge gemacht. So hat er z.B. darauf hingewiesen, daß der Begriff *vollstetiger Operator* durch *kompakter Operator* ersetzt werden sollte, da man in der Operatortheorie heutzutage unter den vollstetigen Operatoren eine etwas andere Klasse versteht, die aber für Hilberträume mit den kompakten Operatoren zusammenfällt. Ferner hat der Gutachter vermerkt, daß in diesem Vorlesungsskript nicht alle Begriffe erklärt werden. So fehlen z.B. die Definitionen der *Lebesgue−Räume* L^p, von *äquivalenten Normen* und *vollständigen Orthonormalsystemen*. Hierzu gibt der Zweitautor folgende Literaturhinweise: Die Definition der *Lebesgue−Räume* L^p-Räume findet man im Buch von Kantorowitsch/Akilow, Funktionalanalysis in normierten Räumen, Akademie-Verlag, Berlin, 1964, Kapitel II, Abschnitt 5.1, S.58, die Definition von *vollständigen Orthonormalsystemen* im selben Buch in Kapitel II, Abschnitt 2.3, S.44; die Definition von *äquivalenten Normen* im Buch von H. Heuser, Funktionalanalysis, B.G. Teubner, Stuttgart, 1975,Kapitel II, §7, S.57. Weiter hat der Gutachter nützliche Hinweise zu einzelnen Latex-Befehlen gegeben und einige Schreibfehler entdeckt. Für all diese Hinweise möchte der Zweitautor dem Gutachter herzlich danken.

Ebenfalls bedanken möchte sich der Zweiautor beim Logos Verlag für die angenehme Zusammenarbeit.

Verbesserungsvorschläge sind stets willkommen. Sie erreichen den Zweiautor unter der Emailadresse *kohaupt@beuth-hochschule.de*.

Berlin, Januar 2021 Ludwig Kohaupt

1 Beschränkte lineare Operatoren

Seien E, F zwei Vektorräume über demselben Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine *Abbildung* A von E in F heißt dann *linear* oder *linearer Operator*, wenn gilt

$$A\,(\alpha\,u + \beta\,v) = \alpha\,A\,u + \beta\,v,\ u,\,v \in E,\ \alpha,\,\beta \in \mathbb{K}.$$

Mit $L(E, F)$ bezeichnen wir die Menge der linearen Abbildungen von E in F. Diese Menge bildet selbst wieder einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, wenn man definiert

$$\begin{aligned} (A + B)\,u &= A\,u + B\,u,\ u \in E, \\ (\alpha\,A)\,u &= \alpha\,A\,u,\ u \in E. \end{aligned}$$

Das *Nullelement* $0 \in L(E, F)$ ist die Abbildung

$$0\,u = 0,\ u \in E,$$

die also jedem Vektor $u \in E$ den Nullvektor aus F zuordnet. Ein Vektorraum E heißt *normiert* oder ein *normierter Raum*, wenn jedem Vektor $u \in E$ eine reelle Zahl $\|u\|$, die *Norm* oder der *Betrag von* u, zugeordnet ist mit den folgenden Eigenschaften

$$(N1)\quad \|u\| \geq 0$$

$$(N2)\quad \|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$$

$$(N3)\quad \|\lambda\,u\| = |\lambda|\,\|u\|,\ \lambda \in \mathbb{K}$$

$$(N4)\quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,\ u,\,v \in E.$$

Seien jetzt E, F normierte Räume über demselben Skalenkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Normen $\|\cdot\|_E$ von E, $\|\cdot\|_F$ von F bezeichnen wir der Einfachheit halber mit $\|\cdot\|$, wobei jeweils aus dem Zusammenhang hervorgeht, um welche Norm es sich handelt. Eine *Abbildung* $A \in L(E, F)$ heißt dann *beschränkt*, wenn es eine Zahl $\alpha \geq 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$\|A\,u\| \leq \alpha\,\|u\|,\ u \in E.$$

Eine Zahl α mit dieser Eigenschaft wollen wir auch eine *Schranke* von A nennen. Für jeden beschränkten Operator $A \in L(E, F)$ existiert folglich eine nichtnegative Zahl $\|A\|$, die *Norm* von A, definiert durch die Gleichung

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|A\,u\| = \sup_{0 \neq u \in E} \frac{\|A\,u\|}{\|u\|}.$$

Damit ist stets

$$\|A\,u\| \leq \|A\|\,\|u\|,\ u \in E.$$

Daher ist $\|A\|$ die kleinste obere Schranke von A.

Die Teilmenge aller linearen beschränkten Abbildungen aus $L(E, F)$ bezeichnen wir mit $B(E, F)$. Offenbar ist $B(E, F)$ ein linearer Teilraum von $L(E, F)$, da für A, $B \in B(E, F)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ folgt

$$\|(A + B)\,u\| \leq (\|A\| + \|B\|)\,\|u\|,\ u \in E,$$

also auch

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

sowie

$$\|\lambda\, A\, u\| = |\lambda|\, \|A\, u\|,\ u \in E$$

und somit

$$\|\lambda\, A\| = \sup_{0\neq u\in E} \frac{\|\lambda\, A\, u\|}{\|u\|} = |\lambda| \sup_{0\neq u\in E} \frac{\|A\, u\|}{\|u\|} = |\lambda|\, \|A\|.$$

Zugleich haben wir damit gezeigt, dass der Raum $B(E,F)$ mit dieser Operatornorm ein normierter Raum ist. Für jeden Operator $A \in B(E,F)$ ist ja

$$(N1) \quad \|A\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|A\| = 0 \iff A = 0$$

$$(N3) \quad \|\lambda\, A\| = |\lambda|\, \|A\|$$

$$(N4) \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|,\ A,\ B \in B(E,F).$$

Beweis von $(N2)$: $\|A\| = 0 \iff \|A\, u\| = 0,\ u \in E \iff A\, u = 0,\ u \in E \iff A = 0.$

Jeder beschränkte lineare Operator $A \in B(E,F)$ ist *stetig*, d.h., für jede konvergente Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist auch die Folge $(A\, u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergent, wie man aus der Ungleichung abliest

$$\|A\, u_j - A\, u_k\| \leq \|A\|\, \|u_j - u_k\| \to 0\ (j,\ k \to \infty).$$

Insbesondere hat man für jede gegen ein Element $u \in E$ konvergente Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Aussage

$$u_j \to u\ (j \to \infty) \quad \Rightarrow \quad A\, u_j \to A\, u\ (j \to \infty).$$

Umgekehrt ist auch jeder stetige lineare Operator $A : E \to F$ beschränkt, so daß man den Satz hat

Satz 1.1

Ein Operator $A \in L(E,F)$ ist dann und nur dann stetig, wenn er beschränkt ist.

Beweis: In der einen Richtung haben wir den Satz oben bereits gezeigt. Jetzt zeigen wir, daß jeder stetige Operator auch beschränkt ist. Andernfalls gäbe es eine Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Elementen mit der Eigenschaft

$$\|u_j\| = 1, \qquad \|A\, u_j\| \to \infty\ (j \to \infty).$$

Setzt man dann

$$v_j = \frac{1}{\|A\, u_j\|}\, u_j,\ j \in \mathbb{N},$$

so gilt

$$v_j \to 0\ (j \to \infty), \qquad \|A\, v_j\| = 1,\ j = 1, 2, 3, \cdots.$$

Da A stetig sein soll, müßte aber $A\, v_j \to A\, 0 = 0\ (j \to \infty)$ streben, womit ein Widerspruch herbeigeführt ist. ◇

Beispiel 1. Matrizen $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $a_{jk} \in \mathbb{K},\ j = 1, \cdots, m,\ k = 1, \cdots, n$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Hier ist $E = \mathbb{K}^n$ und $F = \mathbb{K}^m$. Sei $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{K}^n \Rightarrow$

$$(A\,u)_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, u_k,\ j = 1, \cdots, m.$$

Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm auf $\mathbb{K}^l$ für $l \in \{m, n\}$ erklärt durch

$$\|u\|_\infty = \max_{j=1,\cdots,l} |u_j|,\ u = (u_1, \cdots, u_l) \in \mathbb{K}^l.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|A\,u\|_\infty &= \max_{j=1,\cdots,m} |(A\,u)_j| = \max_{j=1,\cdots,m} |\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, u_k| \\ &\le \max_{j=1,\cdots,m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|\,|u_k| \le \max_{j=1,\cdots,n} |u_k| \max_{j=1,\cdots,m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| \\ &= \alpha\,\|u\|_\infty, \end{aligned}$$

also

$$\|A\,u\|_\infty \le \alpha \|u\|_\infty$$

mit

$$\alpha = \max_{j=1,\cdots,m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|$$

und

$$\|u\|_\infty = \max_{j=1,\cdots,n} |u_j|, \qquad u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{K}^n.$$

◇

Beispiel 2. (i) Sei $E = F = C[a, b]$, wobei $C[a, b]$ der Vektorraum der auf $[a, b]$ stetigen Funktionen bedeutet. Sei wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und sei $C[a, b]$ versehen mit der Maximumnorm

$$\|u\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |u(x)|,\ u \in E.$$

Weiter sei $A(\cdot, \cdot)$ auf $[a, b] \times [a, b]$ stetig. Dann wird durch

$$(A\,u)(x) := \int_a^b A(x, y)\, u(y)\, dy,\ u \in E$$

ein Operator $A \in B(E, F) =: B(E)$ definiert. Denn es gilt

$$|(A\,u)(x)| \le \int_a^b |A(x, y)|\,|u(y)|\, dy \le \max_{y \in [a,b]} |u(y)| \int_a^b |A(x, y)|\, dy,\ x \in [a, b]$$

$\Rightarrow$

$$\|A\,u\|_\infty \le \alpha\,\|u\|_\infty$$

mit

$$\alpha = \max_{x \in [a,b]} \int_a^b |A(x, y)|\, dy.$$

(ii) Sei $1 < p, q < \infty$ und

$$\|u\|_p = (\int_a^b |u(y)|^p \, dy)^{\frac{1}{p}}, \; u \in C[a,b].$$

Weiter sei $E = C_p[a,b]$ der Raum $C[a,b]$ versehen mit der Norm $\| \cdot \|_p$ sowie $F = C_q[a,b]$.

Als Hilfsmittel zum Beweis der Beschränktheit des Operators A in dieser p-Norm wird Hölders Ungleichung (siehe Taylor, Introduction to Functional Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1958, S.6) herangezogen:

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \;, \; f, \, g \in C[a,b],$$

wobei p' aus $1/p + 1/p' = 1$ bestimmt ist. Damit erhält man

$$\|A\, u\|_q \leq \alpha \, \|u\|_p, \; u \in E$$

mit

$$\alpha = \left(\int_a^b \left(\int_a^b |A(x,y)|^{p'} dy \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \;;$$

für Einzelheiten hierzu, siehe **Aufgabe 1.1**.

Spezialfall: $q = p'$ In diesem Fall wird q aus der Beziehung $1/p + 1/q = 1$ bestimmt, und es gilt

$$\alpha = \left(\int_a^b \left(\int_a^b |A(x,y)|^q dy \right) dx \right)^{\frac{1}{q}} .$$

(iii) Seien $E = C^m[a,b]$, wobei $C^m[a,b]$ der Raum der auf $[a,b]$ m-mal stetig differenzierbaren Funktionen bedeutet, und $F = C[a,b]$. Seien ferner $a_j \in C[a,b], \; j = 0, 1, \cdots, m$. Dann ist durch

$$A\, u := \sum_{j=0}^{m} a_j u^{(j)}, \; u \in E$$

eine lineare Abbildung $A : E \to F$ erklärt. Sei

$$\|u\| = \|u\|_E = \sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|_\infty, \; u \in E$$

und

$$\|v\| = \|v\|_F = \|v\|_\infty, \; v \in F.$$

Daraus ergibt sich

$$\|A\, u\|_F \leq \alpha \, \|u\|_E, \; u \in E$$

mit

$$\alpha = \max_{\substack{x \in [a,b] \\ j=0,1,\cdots,m}} |a_j(x)|;$$

für Einzelheiten hierzu, siehe **Aufgabe 1.2**. ◇

Bemerkungen:

In diesem Abschnitt wurden vom Zweitautor die Normeigenschaften (N1) -(N4) für Vektoren und beschränkte lineare Operatoren hinzugefügt sowie die Beispiele erheblich detaillierter als in der ursprünglichen Fassung dargestellt. Die Normeigenschaften (N1) - (N4) wurden aus dem Buch F. Stummel/K. Hainer, Praktische Mathematik, B.G. Teubner, Stuttgart, 1982 entnommen. ◇

2 Beschränkte Sesquilinearformen

Sei E ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann versteht man unter einer *Sesquilinearform* $a(\cdot,\cdot)$ eine Funktion, die jedem geordneten Paar von Vektoren u, v aus E eine Zahl $a(u,v) \in \mathbb{K}$ zuordnet mit den folgenden Eigenschaften (Sq1) - (Sq4):

$$(Sq1) \quad a(u_1 + u_2, v) = a(u_1, v) + a(u_2, v), \quad u_1,\, u_2,\, v \in E,$$

$$(Sq2) \quad a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2), \quad u,\, v_1,\, v_2 \in E,$$

$$(Sq3) \quad a(\lambda\, u, v) = \lambda\, a(u, v), \quad \lambda \in \mathbb{K},\, u,\, v \in E,$$

$$(Sq4) \quad a(u, \lambda v) = \overline{\lambda}\, a(u, v), \quad \lambda \in \mathbb{K},\, u,\, v \in E.$$

Unter einer *Bilinearform* versteht man eine Funktion $a(\cdot,\cdot)$, die jedem geordneten Paar von Vektoren u, v aus E eine Zahl $a(u,v) \in \mathbb{K}$ zuordnet mit den folgenden beiden Eigenschaften (B1) - (B4):

$$(B1) \quad a(u_1 + u_2, v) = a(u_1, v) + a(u_2, v), \quad u_1,\, u_2,\, v \in E,$$

$$(B2) \quad a(u, v_1 + v_2) = a(u, v_1) + a(u, v_2), \quad u,\, v_1,\, v_2 \in E,$$

$$(B3) \quad a(\lambda\, u, v) = \lambda\, a(u, v), \quad \lambda \in \mathbb{K},\, u,\, v \in E,$$

$$(B4) \quad a(u, \lambda v) = \lambda\, a(u, v), \quad \lambda \in \mathbb{K},\, u,\, v \in E.$$

Eine Bilinearform bzw. Sesquilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

$$(S) \quad a(u,v) = a(v,u),\; u,\, v \in E$$

bzw. *hermitesch*, wenn

$$(H) \quad a(u,v) = \overline{a(v,u)},\; u,\, v \in E$$

gilt.

Unter einem *Skalarproduct* $(\cdot,\cdot)$ versteht man eine Sesquilinearform, die positiv definit ist, also eine Sesquilinearform mit folgenden Eigenschaften:

$$(S1) \quad (\lambda\, u + \mu\, v, w) = \lambda\, (u,w) + \mu\, (v,w),\; \lambda,\, \mu \in \mathbb{K},\; u,\, v,\, w \in E,$$

$$(S2) \quad (u,v) = \overline{(v,u)},\; u,\, v \in E,$$

$$(S3) \quad (u,u) \geq 0,\, u \in E,$$

$$(S4) \quad (u,u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$$

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *prähilbertscher Raum*, den wir auch mit H bezeichnen.

Wenn nur die Eigenschaften (S1), (S2), (S3) erfüllt sind, dann nennen wir $(\cdot,\cdot)$ ein *semidefinites Skalarprodukt*. In (S2) bezeichnet $\overline{(v,u)}$ die konjugiert-komplexe Zahl zu

(v, u). Wenn also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen ist, so lautet (S2) einfacher

$$(u, v) = (v, u),\ u,\ v \in E,\ \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Jeder Vektorraum mit Skalarprodukt ist ein normierter Raum mit der Norm

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in E.$$

Durch diese Vorschrift erhält man nämlich eine Funktion $\|\cdot\|$ auf E, die offenbar die Eigenschaften (N1), (N2), (N3) besitzt. Weiter genügt bekanntlich jedes Skalarprodukt der *Schwarzschen Ungleichung*

$$|(u, v)| \leq \|u\|\,\|v\|, \quad u,\ v \in E,$$

die bereits für Semiskalarprodukte gilt, wofür der Beweis, den man z.B. im Internet findet, etwas abgeändert werden muss. Damit folgt die Dreiecksungleichung (N4) aus der Beziehung

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2, \quad u,\ v \in E.$$

Eine Bilinearform bzw. Sesquilinearform a auf $E \times E$ heißt dann *beschränkt*, wenn es eine Zahl $\alpha \geq 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$|a(u, v)| \leq \alpha\,\|u\|\,\|v\|,\ u,\ v \in E.$$

In diesem Fall gibt es wieder eine kleinste Schranke, nämlich die *Norm* $\|a\|$ von a, erklärt durch

$$\|a\| = \sup_{\substack{0 \neq u \in E \\ 0 \neq v \in E}} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|\,\|v\|} = \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ \|v\|=1}} |a(u, v)|;$$

für Einzelheiten hierzu, siehe **Aufgabe 2.1**. Damit ist stets

$$|a(u, v)| \leq \|a\|\,\|u\|\,\|v\|,\ u,\ v \in E.$$

Jeder Sesquilinearform a kann man eine quadratische Form a zuordnen durch die Vorschrift

$$a(u) = a(u, u),\ u \in E.$$

Wenn a beschränkt ist, dann ist auch die quadratische Form a beschränkt mit

$$|a(u)| \leq \|a\|\,\|u\|^2,\ u \in E.$$

Die kleinste Schranke $\|a\|_1$ ist dann

$$\|a\|_1 = \sup_{0 \neq u \in E} \frac{|a(u)|}{\|u\|^2} = \sup_{\|u\|=1} |a(u)| \leq \|a\|.$$

Für eine symmetrische bzw. hermitesche Sesquilinearform ist die zugehörige quadratische Form reellwertig, da in diesem Fall gilt

$$a(u) = a(u, u) = \overline{a(u, u)} = \overline{a(u)},\ u \in E.$$

Damit hat man jetzt den folgenden wichtigen Satz.

Satz 2.1

Sei $E = H$ ein prähilbertscher Raum. Dann ist für eine hermitesche Form a stets

$$\|a\| = \|a\|_1.$$

Beweis: Wir haben bereits $\|a\|_1 \leq \|a\|$ gezeigt. Jede Sesquilinearform a genügt der Bedingung

$$2\,(a(u,v) + a(v,u)) = a(u+v) - a(u-v),\ u, v \in H;$$

für Einzelheiten, siehe **Aufgabe 2.2**. Für eine hermitesche Form a ist daher

$$|Re\, a(u,v)| = \frac{1}{4}\,|a(u+v) - a(u-v)| \leq \frac{1}{4}\,\|a\|_1\,(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) \leq \|a\|_1$$

für jedes $u, v \in H$ mit $\|u\| = \|v\| = 1$; für Einzelheiten, siehe **Aufgabe 2.3**.

Für jedes $u, v \in H$ gibt es weiter ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$a(u,v) = e^{i\varphi}|a(u,v)|.$$

Damit wird $e^{-i\varphi}a(u,v) = a(e^{-i\varphi}u, v)$ reell und

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= e^{-i\varphi}a(u,v) = Re\,\{e^{-i\varphi}a(u,v)\} = Re\,\{a(e^{-i\varphi}u,v)\} \\ &\leq \|a\|_1, \end{aligned}$$

falls $\|u\| = \|v\| = 1$ ist; für Einzelheiten, siehe **Aufgabe 2.4**. Daraus ergibt sich

$$\|a\| = \sup_{\|u\|=\|v\|=1} |a(u,v)| \leq \|a\|_1.$$

Zusammen mit der obigen Ungleichung wird so $\|a\| = \|a\|_1$. ◇

Eine symmetrische Sesquilinearform heißt *nach unten halbbeschränkt*, wenn es eine reelle Zahl α_0 gibt mit der Eigenschaft

$$\alpha_0\|u\|^2 \leq a(u),\ u \in E = H.$$

In diesem Fall ist die Zahl

$$m = \inf_{0 \neq u \in E} \frac{a(u)}{\|u\|^2} = \inf_{\|u\|=1} a(u)$$

die größte untere Schranke für a.

Entsprechend heißt eine symmetrische Sesquilinearform *nach oben halbbeschränkt*, wenn mit einer reellen Zahl α_1 gilt

$$a(u) \leq \alpha_1\|u\|^2,\ u \in E.$$

Damit ist

$$M = \sup_{0 \neq u \in E} \frac{a(u)}{\|u\|^2} = \sup_{\|u\|=1} a(u)$$

die kleinste obere Schranke für a, und man hat unmittelbar den folgenden Satz.

Satz 2.2

Sei $E = H$ ein prähilbertscher Raum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine beschränkte symmetrische Sesquilinearform a auf $E \times E$ ist stets nach unten und oben halbbeschränkt, und es gilt die Darstellung

$$\|a\| = \|a\|_1 = \max(|m|, |M|);$$

für Einzelheiten, siehe **Aufgabe 2.5**.
Sei weiter A ein symmetrischer beschränkter linearer Operator, d.h. es gelte

$$(Au, v) = (u, Av), \quad u, v \in E = H.$$

Weiter sei A nach unten bzw. oben halbbeschränkt. Gibt es einen Vektor $v \neq 0$ mit

$$m = \frac{(v, Av)}{\|v\|^2} = \inf_{0 \neq u \in E} \frac{(u, Au)}{\|u\|^2}$$

bzw.

$$M = \frac{(v, Av)}{\|v\|^2} = \sup_{0 \neq u \in E} \frac{(u, Au)}{\|u\|^2},$$

dann ist v ein Eigenvektor von A und m bzw. M ein zugehöriger Eigenwert.

Beweis: Im ersten Fall ist der Operator

$$B = A - mI$$

positiv semidefinit, d.h. es gilt

$$(Bu, v) = (u, Bv), \; u, v \in E = H$$

sowie

$$B = A - mI \geq 0.$$

Nun wird durch

$$(u, v)_B := (Bu, v), \; u, v \in E = H$$

ein Semiskalarprodukt definiert. Nach dem oben Gesagten gilt daher die Schwarzsche Ungleichung

$$|(u, v)_B| \leq \|u\|_B \, \|v\|_B, \quad u, v \in E = H,$$

wobei

$$\|u\|_B = ((u, u)_B)^{\frac{1}{2}} = (Bu, u)^{\frac{1}{2}} = (u, Bu)^{\frac{1}{2}}, \; u \in E = H$$

gesetzt ist. Daraus folgt

$$|(u, Bv)|^2 \leq (u, Bu)\,(v, Bv), \; u, v \in E = H.$$

Für den oben definierten Vektor v mit $m = \dfrac{(v, Av)}{\|v\|^2}$ ist aber $(v, Bv) = 0$, so daß gilt

$$(u, Bv) = 0, \; u \in H \Longleftrightarrow Bv = 0$$

oder

$$Av = mv.$$

Der Beweis im zweiten Fall erfolgt ähnlich wie im ersten Fall; für Einzelheiten, siehe **Aufgabe 2.6**. $\diamond$

Bemerkungen: Die Eigenschaften (Sq1) - (Sq4) von Sesquilinearformen und von (B1) -(B4) von Bilinearformen sind vom Zweitautor hinzugefügt worden. Die Eigenschaften (S1) -(S4) für Skalarprodukte sind dem folgenden Buch entnommen: F. Stummel/K. Hainer, Praktische Mathematik, B.G. Teubner, Stuttgart, 1982, Abschnitt 5.3. $\diamond$

1 Beschränkte lineare Operatoren

Aufgabe 1.1: Es werde folgendes vorausgesetzt:

(i) Sei $C[a,b]$ der Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen. Ferner sei $1 < p, q < \infty$ und

$$\|u\|_p = (\int_a^b |u(y)|^p \, dy)^{\frac{1}{p}}, \; u \in C[a,b]$$

sowie $E = C_p[a,b]$ der Raum $C[a,b]$ versehen mit der Norm $\| \cdot \|_p$ und $F = C_q[a,b]$.

(ii) Sei $A(\cdot,\cdot)$ auf $[a,b] \times [a,b]$ stetig und der Operator $A \in B(E,F)$ definiert durch

$$(A\,u)(x) := \int_a^b A(x,y)\, u(y)\, dy, \; u \in E.$$

Man zeige, daß gilt

$$\|A\,u\|_\infty \leq \alpha\, \|u\|_\infty$$

mit

$$\alpha = \left(\int_a^b \left(\int_a^b |A(x,y)|^{p'} dy \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lösung: Für $1/p' + 1/p = 1$ gilt

$$|Au(x)| \leq \left(\int_a^b |A(x,y)|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \underbrace{\left(\int_a^b |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}}_{\|u\|_p}$$

$\Rightarrow$

$$|Au(x)|^q \leq \left(\int_a^b |A(x,y)|^{p'} dy \right)^{\frac{q}{p'}} \|u\|_p^q$$

$\Rightarrow$

$$\int_a^b |Au(x)|^q dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |A(x,y)|^{p'} dy \right)^{\frac{q}{p'}} dx \; \|u\|_p^q$$

$\Rightarrow$

$$\left(\int_a^b |Au(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b \left(\int_a^b |A(x,y)|^{p'} dy \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|u\|_p$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = \left(\int_a^b \left(\int_a^b |A(x,y)|^{p'} dy \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

◇

Aufgabe 1.2: Es werde folgendes vorausgesetzt:

Seien $E = C^m[a,b]$, wobei $C^m[a,b]$ der Raum der auf $[a,b]$ m-mal stetig differenzierbaren Funktionen bedeutet, und $F = C[a,b]$. Seien ferner $a_j \in C[a,b],\ j = 0,1,\ldots,m$. Dann ist durch

$$A\,u := \sum_{j=0}^{m} a_j u^{(j)},\ u \in E$$

eine lineare Abbildung $A : E \to F$ erklärt. Sei

$$\|u\| = \|u\|_E = \sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|_\infty,\ u \in E$$

und

$$\|v\| = \|v\|_F = \|v\|_\infty,\ v \in F.$$

Man zeige, daß gilt

$$\|A\,u\|_F \le \alpha\,\|u\|_E,\ u \in E$$

mit

$$\alpha = \max_{\substack{x\in[a,b]\\ j=0,1,\ldots,m}} |a_j(x)|.$$

Lösung: Es gilt

$$|Au(x)| \le \sum_{j=0}^{m} |a_j(x)|\,|u^{(j)}(x)| \le \max_{\substack{x\in[a,b]\\ j=0,1,\ldots,m}} |a_j(x)| \sum_{j=0}^{m} |u^{(j)}(x)|$$

$\Rightarrow$

$$\max_{x\in[a,b]} |Au(x)| \le \sum_{j=0}^{m} |a_j(x)|\,|u^{(j)}(x)| \le \max_{\substack{x\in[a,b]\\ j=0,1,\ldots,m}} |a_j(x)| \sum_{j=0}^{m} \max_{x\in[a,b]} |u^{(j)}(x)| = \alpha\,\|u\|_E$$

$\Rightarrow$

$$\|A\,u\|_F \le \alpha\,\|u\|_E,\ u \in E$$

mit

$$\alpha = \max_{\substack{x\in[a,b]\\ j=0,1,\ldots,m}} |a_j(x)|.$$

◇

2 Beschränkte Sesquilinearformen

Aufgabe 2.1: Durch

$$\|a\| = \sup_{\substack{0\neq u\in E\\ 0\neq v\in E}} \frac{|a(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|} = \sup_{\substack{\|u\|=1\\ \|v\|=1}} |a(u,v)|,$$

wird eine Norm für die beschränkte Sesquilinearform a erklärt.

Lösung: Es werden die Normgesetze (N1) - (N4) nachgewiesen:

(N1) $\|a\| \geq 0$

(N2) $\|a\| = 0 \iff a(u,v) = 0,\ u,v \in E \iff a = 0$

(N3) $\|\lambda\, a\| = \sup_{\substack{\|u\|=1\\ \|v\|=1}} |\lambda\, a(u,v)| = |\lambda| \sup_{\substack{\|u\|=1\\ \|v\|=1}} |a(u,v)| = |\lambda|\,\|a\|$

(N4) $\quad |(a+b)(u,v))| = |a(u,v) + b(u,v)| \leq |a(u,v)| + |b(u,v)|$

$\leq \|a\|\,\|u\|\,\|v\| + \|b\|\,\|u\|\,\|v\| \leq (\|a\| + \|b\|)\,\|u\|\,\|v\|, \quad u,v \in E$

$\Rightarrow$

$$\frac{|(a+b)(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|} \leq \|a\| + \|b\|, \quad u,v \in E$$

$\Rightarrow$

$$\sup_{\substack{0\neq u\in E\\ 0\neq v\in E}} \frac{|(a+b)(u,v)|}{\|u\|\,\|v\|} \leq \|a\| + \|b\|, \quad u,v \in E$$

$\Rightarrow$

$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$, q.e.d. ◇

Aufgabe 2.2: Man zeige, daß für eine hermitesche Sesquilinearform gilt

$$2\,(a(u,v) + a(v,u)) = a(u+v) - a(u-v),\ u,v \in H.$$

Lösung: Nach Tayler, S. 108, gilt für $a(u,v) = (u,v)$ die Formel

$$2\,[(u,v) + \underbrace{(v,u)}_{=\overline{(u,v)}}] = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2$$

$\Rightarrow$

$$Re\,(u,v) = \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2].$$

Ersetzt man hier (u,v) durch a(u,v), so folgt die Behauptung. ◇

Bem.: Weitere Formeln findet man z.B. bei Heuser, S. 247:

$$(u,v) = \begin{cases} \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2, & \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\[2ex] \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 + i\left\|\frac{u+i\,v}{2}\right\|^2 - i\left\|\frac{u-i\,v}{2}\right\|^2, & \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich für eine hermitesche Sesquilinearform $a(\cdot,\cdot)$ die Formeln

$$a(u,v) = \begin{cases} a(\frac{u+v}{2}) - a(\frac{u-v}{2}), & \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \\ a(\frac{u+v}{2}) - a(\frac{u-v}{2}) + i\,a(\frac{u+i\,v}{2}) - i\,a(\frac{u-i\,v}{2}), & \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Weiter folgt nach dem obigen noch die Formel

$$Re\,a(u,v) = \frac{1}{4}[a(u+v) - a(u-v)].$$

◇

Aufgabe 2.3: Man zeige, daß für eine hermitesche Sesquilinearform gilt

$$|Re\,a(u,v)| = \frac{1}{4}|a(u+v) - a(u-v)| \leq \frac{1}{4}\,\|a\|_1\,(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) \leq \|a\|_1$$

für $\|u\| = \|v\| = 1$.

Lösung: Man hat

$$\begin{aligned} |Re\,a(u,v)| &= \tfrac{1}{4}|a(u+v) - a(u-v)| \leq \tfrac{1}{4}(|a(u+v)| + |a(u-v)|) \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\sup_{\substack{\tilde u+\tilde v\neq 0\\ \tilde u,\tilde v\in H}} \frac{a(\tilde u+\tilde v)}{\|\tilde u+\tilde v\|^2}\,(\|u+v\|^2) + \sup_{\substack{\tilde u-\tilde v\neq 0\\ \tilde u,\tilde v\in H}} \frac{a(\tilde u-\tilde v)}{\|\tilde u-\tilde v\|^2}\,(\|u-v\|^2)\right) \\ &\leq \frac{1}{4}[\|a\|_1\|u+v\|^2 + \|a\|_1\|u-v\|^2] \\ &\leq \frac{1}{4}\,\|a\|_1\,(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$|Re\,a(u,v)| \leq \frac{1}{4}\,\|a\|_1\,(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\,Re\,(u,v) + \|v\|^2 \\ &+ \|u\|^2 - 2\,Re\,(u,v) + \|v\|^2 \\ &= 2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2 = 4, \quad \|u\| = \|v\| = 1, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. ◇

Aufgabe 2.4: Für $a(u,v) = e^{i\varphi}|a(u,v)|$ gilt

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= e^{-i\varphi}a(u,v) = Re\,\{e^{-i\varphi}a(u,v)\} = Re\,\{a(e^{-i\varphi}u,v)\} \\ &\leq \|a\|_1, \end{aligned}$$

falls $\|u\| = \|v\| = 1$ ist.

Lösung: Es ist nur die letzte Ungleichung zu zeigen.